

Variable aléatoire discrète.
lois usuelles de probabilité: loi binomiale
,loi de Poisson

Les phénomènes aléatoires sont le résultat d'une épreuve

qui peut se traduire par une « grandeur »
mathématique,

La notion mathématique qui représente ce genre de
situation concrète est celle

de la **variable aléatoire (notée également
v.a.)**.

très souvent représentée par un nombre entier ou un
nombre réel.

Exemples: le nombre de consultants par séance
le nombre d'enfants dans un couple

Définition:

Une variable aléatoire est dite **discrète** si elle ne **prend que des valeurs discontinues.**

En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un **dénombrement** ou d'une **numération** **sont** de type discrètes

En résumé: on dit que x est une variable aléatoire si sa valeur est fixée par le **résultat d'une épreuve** et une variable discrète si elle ne peut prendre que des **valeurs isolées**.

Soit x une variable pouvant prendre l'ensemble des valeurs :

$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n,$

avec les probabilités

$p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n,$ respectivement, telles que :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots + p_n = \sum P_i = 1$$

Loi de probabilité :

On dit qu'on a défini **une loi de probabilité** (fonction de distribution) d'une variable aléatoire discrète si on arrive à déterminer toutes les valeurs que peut prendre la variable x_i et toutes les probabilités correspondantes P_i .

On peut présenter une loi de probabilité par un ensemble des couples de valeurs associées de x_i et P_i , au moyen d'un tableau

x_i	X_1	X_2	$X_3 \dots \dots \dots X_n$	
P_i	P_1	P_2	P_3	P_n
				$\sum P_i = 1$

Exemple 1 : Soit x la variable aléatoire désignant le nombre de points obtenus en lançant une seule fois un dé équilibré, Déterminer la loi de probabilité de cette variable.

Réponse :
Loi de probabilité :

	x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum p_i$	
	P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1	

Connaissant toutes les valeurs possibles de la variable x_i et les valeurs correspondantes de P_i , on a donc défini la loi de probabilité de cette variable.

Exemple 2: On lance une **paire de dés (2)**. Soit x la somme des points obtenus de chaque face.

-Déterminer la loi de probabilité de cette variable.

■ **Réponse :**

On peut dénombrer tous les cas possibles en construisant le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	On remarque que les valeurs possibles de x sont toutes les valeurs entières de 2 à 12 ; $x \in [2 ; 12]$.
1	2	3	4	5	6	7	
2	3	4	5	6	7	8	
3	4	5	6	7	8	9	
4	5	6	7	8	9	10	
5	6	7	8	9	10	11	
6	7	8	9	10	11	12	

Loi de probabilité

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σp_i
P_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

Donc on a bien défini la loi de probabilité de cette variable, puisqu'on a déterminé toutes les valeurs possibles de x_i et les valeurs correspondantes P_i

Espérance mathématique:

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discontinue, notée $E(x)$:

$$E(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + \dots + p_n x_n \rightarrow$$

$$E(x) = \sum p_i x_i$$

Pour l'exemple 1 :

$$E(x) = (1/6).1 + (1/6).2 + \dots + (1/6).6 = 21/6$$

$$\rightarrow E(x) = 21/6 : 3,5$$

on obtient en moyenne 3,5 points lors d'un jet de dé

Pour l'exemple 2 :

$$E(x) = (1/36).2 + (2/36).3 + \dots + (1/36).12 = 7 \rightarrow E(x)$$

= 7 (on obtient en moy, une somme de 7 lorsqu'on jette 2 fois un dé.

Variance

La variance d'une variable aléatoire discontinue notée σ^2_x ou $V(x)$ est définie par :

$$V(x) = \sum P_i [x_i - E(x)]^2$$

La formule de définition peut s'écrire encore :

$$V(x) = \sum P_i x_i^2 - [E(x)]^2$$

Exemple 1 :

x_i	1	2	3	4	5	6	
P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
$P_i X_i$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	$\sum P_i X_i = 21/6$
$P_i X_i^2$	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6	$\sum P_i X_i^2 = 91/6$

$$\rightarrow E(x) = \sum P_i \cdot x_i = 21/6$$

$$\rightarrow E(x) = 21/6$$

$$\rightarrow V(x) = \sum P_i x_i^2 - [E(x)]^2 = 91/6 - [21/6]^2 \quad V(x) = 2,9$$

**lois usuelles de probabilité: loi binomiale ,
loi de Poisson.**

La loi binomiale

Une v. a. X qui prend les valeurs entières x telles que $x = 0, 1, 2, \dots, n$

Pour n entier positif, $0 \leq p \leq 1$, $q = 1 - p$,

avec la loi de probabilité de paramètres n et p ; **$B(n, p)$**

$$f(x) = P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

n = le nombre **d'épreuves**

p = la probabilité de succès

x = le nombre d'évènements

$$P(X = x) = B(x; n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = C_n^x p^x q^{n-x}$$

s'appelle une v. a. binomiale

Si X est une v. a. binomiale alors

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

Exemple d'application

- ❑ exemple: on lance 7 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
 - 1 Quelle est la probabilité d'avoir 4 fois face?
 - 2 Calculer l'espérance mathématique $E(x)$ et la variance $V(x)$

Solution:

Cette variable suit une loi binomiale de paramètres $B(7, 1/2)$.

$n=7$ (nombre d'épreuves)

les 2 éventualités: **$p=(\text{succès}), q=(\text{échec})$**

$p=1/2$ (avoir face)

$q=1-p=1/2$ (ne pas avoir face. avoir pile)

1/ $p(x=4)=C_7^4 (0.5)^4(0.5)^3 = 0.2734$

2/ $E(x)=n p=7.0,5=3,5$ (en moyenne il y a 3,5 fois face quand on jette 7 fois une pièce)

$$V(x)=n p q=3,5.0,5=1,75$$

Les résultats sont tabulés (on peut directement tirer les probabilités de la table de la loi binomiale)

La loi de Poisson

Loi de Poisson :

Une v. a. d. X qui prend toutes les valeurs entières x telles que $x = 0, 1, 2, \dots$ avec la loi de probabilité :

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

$e = 2,71$ (base du logarithme népérien)

λ : espérance mathématique $E(x)$, appelée encore en pratique la moyenne.

s'appelle une v. a. de Poisson de paramètre λ

- La loi de Poisson est une loi de probabilité pour *les événements rares* (probabilité faible)

- est utilisée généralement dans le cas de la variable aléatoire discontinue *distribuée dans le temps*.

Utilisation de la loi de Poisson (exemples):

- la fréquence annuelle d'une maladie parasitaire est de 10 cas /50 millions d'habitants

- Paramètres d'une distribution de Poisson:

$$\mathbf{E(x) = V(X) = n p = \lambda}$$

Les résultats sont tabulés (on peut directement tirer les probabilités de la table de la loi de Poisson)

Application de la loi de Poisson

Exemple1:

Sachant que dans un service d'urgences on accueille en moyenne 5 entorses par week-end, quelle est la probabilité d'observer 3 entorses au cours du prochain week-end?

- Loi de Poisson, avec $\lambda = 5$ et $x = 3$ $P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^x / x!$
 $P(X = 3) = 2,71^{-5} \cdot 5^3 / 3! = 0.14$

Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson

La loi de poisson est considérée comme la limite de la loi binomiale lorsque le phénomène est très rare et l'effectif est très élevé.

Dans ce cas $\lambda = n p$ et n tend vers l'infini.

$X \in \text{Bi}(n, p) \cong X \in \text{P}(\lambda)$ avec $(\lambda = n p)$

$$f(x) = P(X = x) = C_x^n \cdot p^x \cdot q^{n-x} \longrightarrow p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

En général l'approximation est valable si:

- 1- $n \geq 30$ (grands échantillons)
- 2- $p \leq 0,10$ (probabilité faible au voisinage de zéro)
- 3- $\lambda = n p \leq 5$